Cuprins

LEGENDĂ:
a) – Iniţiere
b) – Extindere
c) – Dezvoltare
d)-k) – Generalizare

Capitolul 1

Metoda SOS*

„Dicţionar: *X = Eternul necunoscut*
Y = Praştia alfabetului.”
Tudor Muşatescu

Sunt adevărate afirmaţiile:

$a^2 \geq 0,\ \forall a \in \mathbb{R}$, cu egalitate pentru $a = 0$.

$(a-b)^2 \geq 0,\ \forall a,\ b \in \mathbb{R}$, cu egalitate pentru $a = b$.

$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca,\ \forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, cu egalitate pentru $a = b = c$.

$(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca),\ \forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, cu egalitate pentru $a = b = c$.

$ax^2 + bx + c \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$, cu egalitate pentru $\Delta = 0$ şi $x = \dfrac{-b}{2a}$.

$a \leq x \leq b \Leftrightarrow (x-a)(x-b) \leq 0$, cu egalitate dacă $x = a$ sau $x = b$.

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca),\ \forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$.

$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc,\ \ \forall a,\ b,\ c \geq 0$, cu egalitate pentru $a = b = c$.

$\dfrac{1}{(1+a)^2} + \dfrac{1}{(1+b)^2} \geq \dfrac{1}{1+ab},\ \ \forall a,\ b > 0$, cu $ab \geq 1$.

$a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c,\ \ \forall a,\ b,\ c > 0$ şi $abc = 1$, cu egalitate pentru $a = b = c = 1$.

$(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \geq 9,\ \ \forall a,\ b,\ c > 0$, cu egalitate pentru $a = b = c$.

$a^3 + b^3 \geq ab(a+b),\ \ \forall a,\ b \geq 0$, cu egalitate pentru $a = b$.

$\dfrac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2} \geq \dfrac{a+b}{3},\ \ \forall a,\ b > 0$, cu egalitate pentru $a = b$.

$\dfrac{a^3}{a^2+ab+b^2} \geq \dfrac{2a-b}{3},\ \ \forall a,\ b > 0$, cu egalitate pentru $a = b$.

$\sqrt{a^2+ab+b^2} \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}(a+b),\ \ \forall a,\ b \geq 0$, cu egalitate pentru $a = b$.

Teorema SD5

Fie $F(x, y, z)$ un polinom omogen şi simetric. Dacă $\begin{cases} F(x,y,0) \geq 0 \\ F(x,1,1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow F(x, y, z) \geq 0$.

---

* *SOS method* = *Sum of Squares* = sumă de pătrate

1.1. a) Fie a, b, $c > 0$ astfel încât $abc = 1$. Arătaţi că:

$$\sum \frac{c\left(a^2+b^2\right)+1}{a+b} \ge \frac{3}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Daniel Sitaru, Drobeta Turnu-Severin

b) Fie a, b, c, $d > 0$ astfel încât $abcd = 1$. Arătaţi că:

$$\sum \frac{d\left(a^3+b^3+c^3\right)+1}{a+b+c} \ge \frac{4}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right).$$

Marin Chirciu

1.2. a) Fie x, $y > 0$ astfel încât $x + y = 2$. Aflaţi minimul şi maximul expresiei

$$E(x,y)=\frac{1}{x^2-3x+5}+\frac{1}{y^2-3y+5}.$$

S:L19.329 din SGM 12/2019, Dan Andrei Tudor, elev, Bucureşti

b) Fie x, $y > 0$ astfel încât $x + y = 2$. Aflaţi minimul şi maximul expresiei

$$E(x,y)=\frac{1}{x^2-ax+2a-1}+\frac{1}{y^2-ay+2a-1}, \text{ unde } 1 \le a \le 4.$$

MATCH 12/2019

1.3. a) Dacă $x > 0$ atunci:

i) $\dfrac{1}{x^2+2} \ge \dfrac{7-2x}{18}$.

ii) $\dfrac{1}{x^2+n} \ge \dfrac{n+12-4x}{(n+4)^2}$, unde $0 \le n \le 4$.

b) Fie a, b, $c > 0$ astfel încât $a + b + c = 6$. Arătaţi că:

i) $\dfrac{a^2}{a^2+2}+\dfrac{b^2}{b^2+2}+\dfrac{c^2}{c^2+2} \le 2$.

ii) $\dfrac{a^2}{a^2+n}+\dfrac{b^2}{b^2+n}+\dfrac{c^2}{c^2+n} \le \dfrac{12}{n+4}$, unde $0 \le n \le 4$.

1.4. a) Dacă a, b, $c > 0$ şi $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=6$, atunci

$$\frac{1}{a^2+2}+\frac{1}{b^2+2}+\frac{1}{c^2+2} \le \frac{9}{(a+b+c)^2}.$$

RMM 03/2020, Nguyen Viet Hung, Vietnam

b) Dacă a, b, $c > 0$ şi $a^2+b^2+c^2=3$, atunci:

$$\frac{1}{a^2+2}+\frac{1}{b^2+2}+\frac{1}{c^2+2} \le \frac{9}{(a+b+c)^2}.$$

c) Dacă a, b, $c > 0$ şi $a^2+b^2+c^2=3$ şi $n \ge 1$, atunci:

$$\frac{1}{a^2+n}+\frac{1}{b^2+n}+\frac{1}{c^2+n} \le \frac{27}{(n+1)(a+b+c)^2}.$$

MATCH 08/2020

1.5. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale:

a) $\sqrt[4]{\dfrac{x^8+1}{2}} \le \sqrt{x^4-x^2+1} \le 2x^2-3x+2$. b) $3\sqrt[3]{x^2-x+1} \le x^2-x+3$.

c) $3\sqrt[3]{x^2-x+1}+\sqrt[4]{\dfrac{x^8+1}{2}} = 2\left(x^4-3x+4\right)$.

JP.304, 21-RMM Summer Edition 2021, Hoang Le Nhat Tung, Vietnam

d) $\sqrt{x^4-x^2+1} \le 2x^2-3x+2$. e) $3\sqrt[3]{x^2-x+1} \le x^2-x+3$.

f) $3\sqrt[3]{x^2-x+1}+\sqrt{x^4-x^2+1} = 2\left(x^4-3x+4\right)$.

IneMath 2020

1.6. Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $abc \le 1$. Arătaţi că:

a) $\dfrac{1}{a^3(b+c)}+\dfrac{1}{b^3(c+a)}+\dfrac{1}{c^3(a+b)} \ge \dfrac{3}{2}$.

G.380, Recreaţii Matematice 1/2020, D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Ploieşti

b) $\dfrac{1}{a^3(b+\lambda c)}+\dfrac{1}{b^3(c+\lambda a)}+\dfrac{1}{c^3(a+\lambda b)} \ge \dfrac{3}{\lambda+1}$, unde $\lambda \ge 0$.

c) $\dfrac{1}{a^n(b+\lambda c)}+\dfrac{1}{b^n(c+\lambda a)}++\dfrac{1}{c^n(a+\lambda b)} \ge \dfrac{3}{\lambda+1}$, $\lambda \ge 0$ iar $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$.

1.7. a) Fie $a, b, c > 0$. Arătaţi că $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 \ge 3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)$.

GM 7-8/1992, Vasile Cârtoaje

b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=a^3+b^3+c^3 \\ a^3b+b^3c+c^3a=3 \end{cases}.$$

JP.304, 21-RMM Summer Edition 2021, Hoang Le Nhat Tung, Vietnam

1.8. Dacă $a, b, c > 0$ şi $abc = 1$ şi $n \ge 0$, atunci:

a) $\dfrac{1}{a^2+a}+\dfrac{1}{b^2+b}+\dfrac{1}{c^2+c} \ge 2\left(\dfrac{1}{a^2+b^2+2}+\dfrac{1}{b^2+c^2+2}+\dfrac{1}{c^2+a^2+2}\right)$.

RMM 1/2020, Tritrotoluen 1/2020

b) $\dfrac{1}{na^2+a}+\dfrac{1}{nb^2+b}+\dfrac{1}{nc^2+c} \ge \dfrac{4}{n+1}\left(\dfrac{1}{a^2+b^2+2}+\dfrac{1}{b^2+c^2+2}+\dfrac{1}{c^2+a^2+2}\right)$.

c) $\dfrac{1}{a^2+na}+\dfrac{1}{b^2+nb}+\dfrac{1}{c^2+nc} \ge \dfrac{4}{n+1}\left(\dfrac{1}{a^2+b^2+2}+\dfrac{1}{b^2+c^2+2}+\dfrac{1}{c^2+a^2+2}\right)$.

IneMath 2020

1.9. Dacă $x, y \in [0, 1]$, atunci:

a) $\dfrac{x}{\sqrt{2y^2+5}}+\dfrac{y}{\sqrt{2x^2+5}} \le \dfrac{x+y}{\sqrt{2x^2+2y^2+3}}$.

b) $\dfrac{x}{\sqrt{2y^2+5}}+\dfrac{y}{\sqrt{2x^2+5}}\le\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

Inequality in triangle 1478, 03/2020, Mathematical Olimpiads

c) $\dfrac{x}{\sqrt{ay^2+b}}+\dfrac{y}{\sqrt{ax^2+b}}\le\dfrac{x+y}{\sqrt{ax^2+by^2+b-a}}$, unde $0<a<b$.

d) $\dfrac{x}{\sqrt{ay^2+b}}+\dfrac{y}{\sqrt{ax^2+b}}\le\dfrac{2}{\sqrt{a+b}}$, unde $0<a<b$.

1.10. a) Dacă $x>0$, atunci:

i) $\sqrt{x^4+8x}\le x^2+2$. ii) $\sqrt{x\left(x^3+a^3\right)}\le x^2+\dfrac{a^2}{2}$, unde $a\ge\sqrt{2}$.

iii) $\dfrac{x^3}{x^2+\lambda}\ge\dfrac{(3\lambda+1)x-2\lambda}{(\lambda+1)^2}$, unde $\lambda\ge 1$.

b) Fie $x, y, z>0$ astfel încât $x+y+z=3$. Determinaţi minimul expresiei:

$$T=\frac{x^3}{\sqrt{x^4+8x}}+\frac{y^3}{\sqrt{y^4+8y}}+\frac{z^3}{\sqrt{z^4+8z}}.$$

c) Fie $x, y, z>0$ astfel încât $x+y+z=3$ şi $a\ge\sqrt{2}$. Arătaţi că:

$$\frac{x^3}{\sqrt{x\left(x^3+a^3\right)}}+\frac{y^3}{\sqrt{y\left(y^3+a^3\right)}}+\frac{z^3}{\sqrt{z\left(z^3+a^3\right)}}\ge\frac{6}{a^2+2}.$$

Marin Chirciu

1.11. Dacă $a, b, c>0$ şi $abc=1$, atunci:

a) $\sum\dfrac{a\left(b^2+c^2\right)+1}{b+c}\ge\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$.

JP.310, 21-RMM Summer Edition 2021, Daniel Sitaru, Drobeta Turnu-Severin

b) $\sum\dfrac{a\left(b^2+c^2\right)+n}{b+c}\ge\dfrac{n+2}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$, unde $n\le 2$.

1.12. Fie $x, y, z>0$ cu $x+y+z=3$. Arătaţi că:

a) $\dfrac{7-6x}{2+x^2}+\dfrac{7-6y}{2+y^2}+\dfrac{7-z}{2+z^2}\ge 1$.

b) $\dfrac{3n+1-3nx}{n+x^2}+\dfrac{3n+1-3ny}{n+y^2}+\dfrac{3n+1-3nz}{n+z^2}\ge\dfrac{3}{n+1}$, unde $n\ge 0$.

1.13. a) Dacă $a, b, c>0$, atunci:

$$a\sqrt{3a^2+6b^2}+b\sqrt{3b^2+6c^2}+c\sqrt{3c^2+6a^2}\ge(a+b+c)^2.$$

Saudi Arabia Mathematical Competition, 2020

b) Dacă a, b, $c > 0$ şi $x \geq 1$, $y \geq 4$, $xy = 4x + y$, atunci:

$$a\sqrt{xa^2 + yb^2} + b\sqrt{xb^2 + yc^2} + c\sqrt{xc^2 + ya^2} \geq (a+b+c)^2.$$

c) Dacă a, b, $c > 0$, atunci:

$$a\sqrt[3]{9\left(a^3 + 2b^3\right)} + b\sqrt[3]{9\left(b^3 + 2c^3\right)} + c\sqrt[3]{9\left(c^3 + 2a^3\right)} \geq (a+b+c)^2.$$

d) Dacă a, b, $c > 0$, atunci:

$$a\sqrt[4]{27\left(a^4 + 2b^4\right)} + b\sqrt[4]{27\left(b^4 + 2b^4\right)} + c\sqrt[4]{27\left(c^4 + 2a^4\right)} \geq (a+b+c)^2$$

e) Dacă a, b, $c > 0$ şi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, atunci:

$$a\sqrt[n]{3^{n-1}\left(a^n + 2b^n\right)} + b\sqrt[n]{3^{n-1}\left(b^n + 2c^n\right)} + c\sqrt[n]{3^{n-1}\left(c^n + 2a^n\right)} \geq (a+b+c)^2.$$

MATCH 04/2020

1.14. a) Determinaţi valoarea minimă a funcţiei:

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x, y) = \frac{4^x + 4^y}{\left(2^{x+1} + 2^y\right)\left(2^x + 2^{y+1}\right)}.$$

Jalil Hajimir, *Canada*

b) Fie $a > 0$, $a \neq 1$, fixat. Determinaţi valoarea minimă a funcţiei:

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x, y) = \frac{a^{2x} + a^{2y}}{\left(a^{x+1} + a^y\right)\left(a^x + a^{y+1}\right)}.$$

1.15. Dacă a, b, $c > 0$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca = 6$, atunci:

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \geq \frac{3}{4}.$$

Hoang Le Nhat Tung, *Vietnam*

1.16. Dacă a, b, $c > 0$, atunci:

$$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{ab+bc+ca}{8} \geq \frac{9}{8}.$$

Hoang Le Nhat Tung, *Vietnam*

1.17. a) Fie a, b, c, $d > 0$ astfel încât $a + b + c + d = 1$. Arătaţi că:

$$ab(1-c) + ac(1-d) + ad(1-b) + bc(1-d) + d(b+c) + abcd \leq \frac{81}{256}.$$

P.1122, *Enjoy Solving Mathematics*, *Kunihiko Chikaya*

b) Fie a, b, $c > 0$ astfel încât $a + b + c = 1$. Arătaţi că:

$$ab + bc + ca - abc \leq \frac{8}{27}.$$

1.18. Dacă a, $b > 0$, atunci:

a) $2\left(a^9 + b^9\right) \geq \left(a^4 + b^4\right)\left(a^5 + b^5\right)$.

b) $2\left(a^{n+k} + b^{n+k}\right) \geq \left(a^n + b^n\right)\left(a^k + b^k\right)$, unde n, $k \in \mathbb{N}$.

IneMath 2020

1.19. Găsiţi valoarea minimă a expresiei:

a) $\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(x+\frac{1}{y}-2020\right)+\left(y+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{x}-2020\right)$, unde $x, y > 0$.

Amir Sofi

b) $\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(x+\frac{1}{y}-2\lambda\right)+\left(y+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{x}-2\lambda\right)$, unde $x, y > 0$, $\lambda \geq 2$ fixat.

1.20. Dacă $a, b \geq 0$, atunci:

a) $\left(a^2+b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\frac{3}{4}\right)\geq\left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right)$.

Olimpiada Belarus 2005

b) $\left(a^2+b+n\right)\left(b^2+a+n\right)\geq\left(2a+n-\frac{1}{4}\right)\left(2b+n-\frac{1}{4}\right)$, unde $n \geq 0$.

1.21. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale:

a) $\frac{x^2+x}{x^2+x+1}+\frac{y^2+y}{y^2+y+1}+\frac{z^2+z}{z^2+z+1}+1=0$.

b) $\frac{x^2+x}{x^2+x+n}+\frac{y^2+y}{y^2+y+n}+\frac{z^2+z}{z^2+z+n}+\frac{3}{4n-1}=0$, unde $n>\frac{1}{4}$.

c) $\frac{1}{x^3+x}+\frac{1}{y^3+y}+1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

1.22. a) Dacă $a, b > 0$, atunci $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}\geq\frac{2a-b}{3}$.

b) Fie $x, y, z > 0$ astfel încât $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=2$. Arătaţi că $\sum\frac{\sqrt{x^3}}{x+\sqrt{xy}+y}\geq\frac{2}{3}$.

Mathematika 05/2020, Julio Cesar Moroch Orlando

c) Dacă $a, b > 0$, atunci $\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}\geq\frac{a+b}{3}$.

d) Fie $x, y, z > 0$ astfel încât $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=2$. Arătaţi că $\sum\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}}{x+\sqrt{xy}+y}\geq\frac{4}{3}$.

e) Dacă $a, b > 0$ şi $\lambda \geq 0$, atunci $\frac{a^3+b^3}{a^2+\lambda ab+b^2}\geq\frac{a+b}{\lambda+2}$.

f) Fie $x, y, z > 0$ astfel încât $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=2$ și $\lambda \geq 0$. Arătați că:

$$\sum\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}}{x+\lambda\sqrt{xy}+y}\geq\frac{4}{\lambda+2}.$$

Dezvoltări, Marin Chirciu

1.23. a) Dacă $x, y, z > 0$, atunci:

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq \frac{8}{9}(x+y+z)(xy+yz+zx).$$

b) Fie x, y, z numere reale pozitive astfel încât $xyz(xy+yz+zx)=3$. Arătaţi că:

$$(2x^2-xy+2y^2)(2y^2-yz+2z^2)(2z^2-zx+2x^2) \geq 27.$$

J519 Mathematical Reflections, *Hoang Le Nhat Tung*, *Vietnam*

1.24. Fie $x, y > 0$. Arătaţi că:

a) $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x} \geq \dfrac{2(x^5+y^5)}{x^4+y^4}$. *Rahim Shahbazov*, *Azerbaidjan*

b) $\dfrac{x^3}{y}+\dfrac{y^3}{x} \geq \dfrac{2(x^5+y^5)}{x^3+y^3}$.

1.25. Dacă $x, y, z > 0$ astfel încât $xyz = 1$, atunci $\sum \dfrac{x^2y^2}{2x^2+3x^2y^2+y^2} \leq \dfrac{1}{2}$.

Mathematical Inequalities 5/2020, *Vietnamez quiz*

1.26. Dacă $x, y, z > 0$, atunci:

a) $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \geq \sqrt{x^2-xy+y^2}$.

b) $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{x} \geq \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}+\dfrac{y^3+z^3}{y^2+z^2}+\dfrac{z^3+x^3}{z^2+x^2}$.

c) $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{x} \geq \sqrt{x^2-xy+y^2}+\sqrt{y^2-yz+z^2}+\sqrt{z^2-zx+x^2}$.

Mathematical Inequalities 5/2020, *Abdul Hannan*

1.27. Dacă $a, b, c > 0$ astfel încât $a^2+b^2+c^2=3$, găsiţi minimul expresiei:

$$E=\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}.$$

Halit Shehu

1.28. Dacă $a, b, c > 0$ astfel încât $ab+bc+ca+abc=4$, găsiţi maximul expresiei:

a) $P=\dfrac{4}{(a+b)^2+20}+\dfrac{4}{(b+c)^2+20}+\dfrac{4}{(c+a)^2+20}$.

Mathematical Inequalities 6/2020, *Imad Zak*, *China*

b) $P=\dfrac{12}{(a+b)^3+64}+\dfrac{12}{(b+c)^3+64}+\dfrac{12}{(c+a)^3+64}$.

c) $P=\dfrac{32}{(a+b)^4+176}+\dfrac{32}{(b+c)^4+176}+\dfrac{32}{(c+a)^4+176}$.

d) $P=\frac{80}{(a+b)^5+448}+\frac{80}{(b+c)^5+448}+\frac{80}{(c+a)^5+448}$.

e) $P=\frac{n2^{n-1}}{(a+b)^n+(3n-1)2^n}+\frac{n2^{n-1}}{(b+c)^n+(3n-1)2^n}+\frac{n2^{n-1}}{(c+a)^n+(3n-1)2^n}$, $n\in\mathbb{N}$.

1.29. Dacă a, b sunt numere reale atunci:

a) $\frac{a^4+9a^2+4}{5b^2+8}+\frac{b^4+9b^2+4}{5a^2+8}\geq a+b$.

E:15724, GM 5/2020, Constantin Nicolau

b) $\frac{a^4+(n+1)^2a^2+n^2}{(2n+1)b^2+n(n+2)}+\frac{b^4+(n+1)^2b^2+n^2}{(2n+1)a^2+n(n+2)}\geq a+b$, unde $n>0$.

1.30. Dacă $x, y, z\geq 0$ şi $x+y+z=3$, atunci:

a) $\frac{1}{x^3+8}+\frac{1}{y^3+8}+\frac{1}{z^3+8}\leq\frac{1}{3}$.

Mathematical Inequalities 6/2020, Rahim Shahbazov, Azerbaidjan

b) $\frac{1}{x^3+n}+\frac{1}{y^3+n}+\frac{1}{z^3+n}\leq\frac{3}{n+1}$, unde $n\geq 7$.

1.31. a) Dacă $a\in\mathbb{R}$, atunci $a^2-a+1\geq\sqrt{\frac{a^4+1}{2}}$.

b) Dacă $a, b\in\mathbb{R}$, atunci $a^2+ab+b^2\leq\frac{3}{2}\sqrt{(a^4+1)(b^4+1)}$.

c) Dacă $a, b, c\in\mathbb{R}$ şi $\prod(a^2-a+1)=1$, atunci $\prod(a^2+ab+b^2)\leq 27$.

Mathematical Inequalities 2/2020, Marius Stănean

d) Dacă $a, b>0$, atunci $(a^3+1)(b^3+1)\geq ab(a+1)(b+1)$.

e) Dacă $a, b, c>0$ astfel încât $\prod(a^3+1)=8$, atunci $\prod a(a+1)\leq 8$.

Marin Chirciu

1.32. a) Dacă $a\in\mathbb{R}$, atunci $2(1-a+a^2)^2\geq 1+a^4$.

b) Dacă $a, b\in\mathbb{R}$, atunci $2(1-a+a^2)(1-b+b^2)\geq 1+a^2b^2$.

c) Dacă $a, b, c\in\mathbb{R}$, atunci $\prod(a^2-a+1)\geq 1+abc+a^2b^2c^2$.

Mathematical Inequalities 6/2020, Vasile Cârtoaje şi Mircea Lascu

1.33. a) Dacă $a, b, c\geq 0$, atunci:

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geq\frac{4(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}+2.$$

S514 Mathematical Reflections 2/2020, An Zhenping, China