

Paul-Cosmin Manea

Dragoș Petrică

MATEMATICĂ STANDARD

Algebră • Geometrie

Clasa a VII-a

Partea I. Modulele 1, 2

EDITURA
 **COMPER**

TESTE DE EVALUARE ÎNȚIALĂ

TESTUL 1

• Se acordă 10 puncte din oficiu. Timp de lucru 50 de minute.

- Află cel mai mare divizor comun al numerelor 18, 60 și 120.
 - Găsește cel mai mare număr de trei cifre care se împarte exact la 6, 8 și 10.
- Arată că fracția $\frac{8n+5}{5n+3}$ este ireductibilă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
 - Arată că fracția $\frac{\overline{aaa} + \overline{bbb}}{15n+72}$ este reductibilă, unde $a, b \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$.
- Rezolvă în $\mathbb{Z}$ ecuațiile și inecuațiile următoare:
 - $|x-2|=5$;
 - $|x-5| \leq 4$;
 - $x^2 \leq 25$;
 - $(x-3)(2y+1)=10$.
- Prețul unui obiect crește cu 20%. Află cu cât trebuie redus noul preț, pentru a obține prețul inițial.
 - Prețul unui ghiozdan este mărit cu 15%, iar apoi se ieftinește cu 10%. Știind că prețul final al ghiozdanului este 72 de lei și 45 de bani, care a fost prețul inițial al ghiozdanului?
- $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle AOC$ sunt unghiuri neadiacente, cu $m(\sphericalangle AOB) = 80^\circ$ și $m(\sphericalangle BOC) = 30^\circ$. Află măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor AOC și BOC .
- Fie $(OM$ bisectoarea unghiului XOY , iar $ME \perp OX$ și $MF \perp OY$. Demonstrează că $OM \perp EF$.

TESTUL 2

- Câte numere de forma $\overline{aa5}$ sunt divizibile cu 5?
 - Află toate numerele de forma $\overline{a5b9}$ divizibile cu 3, dar nedivizibile cu 9.
- Se consideră numerele $x = \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{5}{12}\right) \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^{-1}$ și $y = \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{6} - \frac{4}{9}\right) : \left(\frac{6}{5}\right)^{-2} \cdot 3$.
Află numerele a și b , știind că acestea sunt direct proporționale cu numerele x și y , iar $a + b = 24$.
- Trei numere raționale sunt direct proporționale cu numerele $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.
 - Dacă suma numerelor este 13, află cele trei numere.
 - Care sunt numerele, dacă media lor aritmetică este 8,(6)?

4. Un rezervor conține apă potabilă pentru 60 de zile. Dacă consumul zilnic se micșorează cu 25%, află numărul de zile pentru care ajunge apa din rezervor.
5. În triunghiul ABC , $[BF]$ și $[CE]$ sunt bisectoarele triunghiului, iar $BF \cap CE = \{I\}$. Arată echivalența: $BI = CI \Leftrightarrow \triangle ABC$ este isoscel.
6. În triunghiul ABC , $[AD]$ este bisectoarea triunghiului, iar E este simetricul lui A față de D . Paralela prin E la AC taie dreapta AB în punctul P . Demonstrează că triunghiul PDE este dreptunghic.

TESTUL 3

1. Arată că $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \overline{da} = \overline{ad} + \overline{dc} + \overline{cb} + \overline{ba}$, unde a, b, c, d sunt cifre nenule.
2. Media aritmetică a trei numere este 150. Să se afle numerele, știind că ele sunt direct proporționale cu numerele 3, 5, 7.
3. Rezolvă ecuațiile: a) $\left|x - \frac{2}{5}\right| = 0,3$; b) $\frac{7x-4}{x} = \left(-\frac{2}{3}\right)^3$.
4. Fie șirul: 2, -6, 18, -54, ...
a) Scrie următorii trei termeni ai șirului.
b) Află al 30-lea termen din șir.
5. Fie triunghiul ABC , cu $m(\sphericalangle ABC) = 75^\circ$ și $m(\sphericalangle ACB) = 20^\circ$. Află măsura unghiului exterior cu vârful în A .
6. Fie ABC un triunghi isoscel, de bază $[BC]$, iar $[CD]$ înălțimea triunghiului dusă din C , $D \in (AB)$. Dacă $2 \cdot CD = AB$, află $m(\sphericalangle B)$.

TESTUL 4

1. Calculează: a) $\left(-\frac{14}{9}\right) : \left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$; b) $1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^2$.
2. Află numerele naturale de forma $\overline{3a4b}$ divizibile cu:
a) 10; b) 3; c) 30.
3. Află $m \in \mathbb{Q}$, astfel încât 2 să fie soluție a ecuației $\frac{m+1}{2} \cdot x - 0,5 = \frac{5}{4}$.
4. Fie expresia $E(x) = |x+3| + |x-5|$.
a) Află valoarea lui $E(x)$ pentru $x = -2$.
b) Arată că $E(x) \geq 8$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}$.
5. Triunghiul ABC este dreptunghic în A , cu $m(\sphericalangle ABC) = 70^\circ$. Află măsura unghiului format de mediana și înălțimea duse din vârful A .
6. Fie triunghiul ABC , M mijlocul lui $[BC]$ și $N \in (AM)$, astfel încât $\sphericalangle BNM \equiv \sphericalangle CNM$. Demonstrează că $\triangle ABC$ este isoscel.

ALGEBRĂ

Capitolul I

MULȚIMEA NUMERELOR REALE

Lecția 1. Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect

1 CE TREBUIE SĂ REȚIN

Numărul natural x se numește pătrat perfect, dacă există un număr întreg a cu proprietatea că $x = a^2$ (1).

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{dacă } a \geq 0 \\ -a, & \text{dacă } a < 0 \end{cases}$$

Reguli de calcul cu puteri:

- 1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
- 2) $a^m : a^n = a^{m-n}$, $m \geq n$;
- 3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;
- 4) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;
- 5) $(a : b)^n = a^n : b^n$, dacă $a : b$ și $b \neq 0$.

$U(a^2) \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$, unde $U(a^2)$ reprezintă ultima cifră a lui a^2 .

► Numărul $|a|$ din relația (1) se numește rădăcina pătrată a numărului x și se notează $\sqrt{x}$. Prin urmare, avem echivalența: $x = a^2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = |a|$, $a \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{N}$.

Exemplu: $\sqrt{36} = 6$, deoarece $|6| = |-6| = 6$.

► Rădăcina pătrată a lui a ($a \in \mathbb{N}$) se mai numește radical de ordinul doi din a .

► Operația de găsim a lui $\sqrt{a}$ se numește extragerea rădăcinii pătrate.

Exemplu: Găsește pătratele perfecte cuprinse între 200 și 500 și extrage rădăcinile pătrate ale acestora.

Pătratele sunt: 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441 și 484.

Rădăcinile pătrate sunt: $\sqrt{225} = 15$, $\sqrt{256} = 16$, ..., $\sqrt{484} = 22$.

► În concluzie, fiind dat un număr nenegativ a , numărul notat cu $\sqrt{a}$, cu proprietățile: $\sqrt{a} \geq 0$ și $(\sqrt{a})^2 = a$, se numește rădăcina pătrată a lui a .

Atenție!

- 1) $\sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b; a, b \in \mathbb{N}$. 2) $a^2 = b \Leftrightarrow a = \sqrt{b}; a, b \in \mathbb{N}$.
3) $\sqrt{a^2} = |a|$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$. 4) $(\sqrt{a})^2 = a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{N}$.

Extragerea rădăcinii pătrate dintr-un număr pătrat perfect

► Pentru a calcula rădăcina pătrată, avem mai multe metode:

• descompunem numărul în factori primi și scriem numărul ca putere (de 2 sau multiplu de 2). Baza puterii este rădăcina pătrată, baza fiind un număr pozitiv.

Exemple: $256 = 2^8 = (2^4)^2 \Rightarrow \sqrt{256} = 2^4 = 16$;

$$324 = 2^2 \cdot 3^4 = (2 \cdot 3^2)^2 \Rightarrow \sqrt{324} = 2 \cdot 3^2 = 18.$$

• folosim algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate.

Exemplu: $\sqrt{1296} = \dots$ – se desparte numărul în grupe de câte două cifre de la dreapta la stânga;

$\sqrt{1296}$	$\begin{array}{r} 3 \\ \hline \end{array}$	căutăm numărul cel mai mare al cărui pătrat nu depășește 12;
---------------	--	--

$\sqrt{1296}$	$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 9 \\ 396 \end{array}$	lângă primul rest 3 coborâm grupa a doua, 96, și dublăm primul cât, 3;
---------------	---	--

$\sqrt{1296}$	$\begin{array}{r} 36 \\ \hline 9 \\ 66 \cdot 6 \\ 396 \\ 396 \\ \hline \end{array}$	vedem de câte ori se cuprinde 6 în 39 (de 6 ori) și-l adăugăm lângă numărul dublat, apoi înmulțim cu el; ne dă restul 0 la scădere și obținem astfel $\sqrt{1296} = 36$.
---------------	---	---

2 SĂ ÎNVĂȚĂM ÎMPREUNĂ

1. Calculează:

- a) $\sqrt{36} - \sqrt{25}$; b) $\sqrt{49} + \sqrt{100}$; c) $\sqrt{36+64}$; d) $\sqrt{100-64}$.

Soluție: a) $\sqrt{36} - \sqrt{25} = 6 - 5 = 1$; b) $\sqrt{49} + \sqrt{100} = 7 + 10 = 17$; c) $\sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$; d) $\sqrt{100-64} = \sqrt{36} = 6$.

2. Adevărat sau fals?

- a) $\sqrt{81} = -9$; b) $\sqrt{121} = 12$;
c) $\sqrt{144} = |-12|$; d) $\sqrt{101^2} = 101$.

Soluție: a) F; b) F; c) A; d) A.

3. Folosind algoritmul de extragere, obținem:

a) $\sqrt{14884} = 1\dots;$

b) $\sqrt{63001} = 2\dots$

Soluție: a) 122; b) 251.

4. Găsește valorile lui x din egalitățile:

a) $\sqrt{x} = 17;$

b) $\sqrt{x} = 75;$

c) $\sqrt{x} = 123.$

Soluție: a) $\sqrt{x} = 17 \Rightarrow x = 17^2 = 289;$ b) $\sqrt{x} = 75 \Rightarrow x = 75^2 = 5625;$ c) $\sqrt{x} = 123 \Rightarrow x = 15129.$



► Alege metoda mai ușoară de rezolvare a problemei:

Calculează $\sqrt{49 \cdot 64 + 49 \cdot 36}$.

Metoda I

$$\begin{aligned}\sqrt{49 \cdot 64 + 49 \cdot 36} &= \sqrt{49(64 + 36)} = \\ &= \sqrt{49 \cdot 100} = \sqrt{4900} = 70.\end{aligned}$$

Metoda a II-a

$$\begin{aligned}\sqrt{49 \cdot 64 + 49 \cdot 36} &= \sqrt{3136 + 1764} = \\ &= \sqrt{4900} = 70.\end{aligned}$$

5. Care număr este mai mare: $1,73 \cdot \sqrt{4}$ sau $1,41 \cdot \sqrt{9}$?

Soluție: Avem $1,73 \cdot \sqrt{4} = 1,73 \cdot 2 = 3,46$, iar $1,41 \cdot \sqrt{9} = 1,41 \cdot 3 = 4,23$. Prin urmare, al doilea număr este mai mare.

6. Află elementele mulțimii: $A = \left\{ x \mid x \in \mathbb{Z}, \frac{-6 + \sqrt{16}}{2} < x < \frac{-3 + \sqrt{49}}{2} \right\}.$

Soluție: Relațiile conduc la $\frac{-6 + 4}{2} < x < \frac{-3 + 7}{2} \Leftrightarrow -1 < x < 2. A = \{0, 1\}.$

7. Află x din: $\frac{x}{\sqrt{81}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{2025}}.$

Soluție: $\frac{x}{9} = \frac{15}{45} \Leftrightarrow x = \frac{9 \cdot 15}{45} = 3.$

8. Știind că aria unui pătrat este egală cu 169 m^2 , află lungimea laturii sale.

Soluție: $A_{\text{pătrat}} = l^2 \Rightarrow l^2 = 169 \Rightarrow l = \sqrt{169} = 13 \text{ m}.$

9. Află x și y distincte, astfel încât numărul $\sqrt{1xy}$ să fie număr natural.

Soluție: Fie $\sqrt{1xy} = a, a \in \mathbb{N}$. Atunci $1xy = a^2$. Or, pătratele de forma $1xy$ ($x \neq y$) sunt: 121, 169 și 196 $\Rightarrow (x, y) \in \{(2, 1), (6, 9), (9, 6)\}.$

3 CUM APLIC CE AM ÎNVĂȚAT

Standard minimal

- Se dau numerele: $-6, -3, 12, -8, 9, -23, 17, 55, 83$. Serie:
a) modulele lor; b) pătratele lor.
- Verifică, fără a aplica algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate, dacă:
a) $\sqrt{3721} = 61$; b) $\sqrt{4356} = 66$; c) $\sqrt{1225} = 45$;
d) $\sqrt{15129} = 123$; e) $\sqrt{2^{24}} = 2^{13}$.
- Află numerele negative x , pentru care avem:
a) $x^2 = 49$; b) $x^2 = 144$; c) $x^2 = 256$;
d) $x^2 = 10000$; e) $4x^2 = 100$; f) $9x^2 = 5625$.
- Calculează:
a) $\sqrt{3^2 + 4^2}$; b) $\sqrt{3^4} - \sqrt{2^6}$; c) $\sqrt{4 \cdot 25}$;
d) $\frac{\sqrt{25 + 75}}{5}$; e) $\sqrt{(11 + 14)^2}$; f) $\sqrt{13^2 - 5^2}$.
- Descompunând numerele în factori primi, extrage:
a) $\sqrt{576}$; b) $\sqrt{1089}$; c) $\sqrt{1225}$;
d) $\sqrt{2500}$; e) $\sqrt{1156}$; f) $\sqrt{529}$.
- Ordonează crescător numerele: $10\sqrt{2 \cdot 8}$, $6\sqrt{3 \cdot 27}$, $\frac{9}{2}\sqrt{36}$.
- Folosind algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate, calculează:
a) $\sqrt{2704}$; b) $\sqrt{1089}$; c) $\sqrt{1681}$;
d) $\sqrt{3481}$; e) $\sqrt{7921}$; f) $\sqrt{12996}$;
g) $\sqrt{292681}$; h) $\sqrt{323761}$; i) $\sqrt{729316}$.
- Rezolvă în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:
a) $x^2 = 16$; b) $5x^2 = 180$; c) $x^2 = 729$;
d) $\frac{4}{x} = \frac{x}{9}$; e) $(x + 1)^2 - 64 = 0$;
f) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = x^2$; g) $2016 + 2015 \cdot 2016 = x^2$.
- Dacă $\sqrt{a} = 5^{2017}$ ($a \in \mathbb{N}$), găsește ultima cifră a numărului a .