

George-Florin Șerban

MATEMATICĂ STANDARD

Aritmetică • Algebră • Geometrie

Clasa a V-a

Partea a II-a. Modulele 3, 4 și 5

EDITURA
COMPER

Capitolul 1

FRACȚII ORDINARE

Lecția 1. Frații ordinare. Clasificarea fracțiilor ordinare

1 CE TREBUIE SĂ REȚIN

Definiție: Fie a și b două numere naturale cu $b \neq 0$. Se numește **fracție** $\frac{a}{b}$ câtul neefectuat al împărțirii lui a la b .

$\frac{a}{b}$ se citește „ a supra b ”.

a se numește **numărătorul** fracției, b se numește **numitorul** fracției.
Linia de fracție reprezintă operația de împărțire.

Exemple de fracții ordinare:  $\frac{1}{2}$  $\frac{2}{3}$  $\frac{1}{4}$

O fracție ordinară poate fi de trei tipuri: fracție subunitară, fracție echiunitară, fracție supraunitară.

Definiție: O fracție ordinară este **subunitară** dacă numărătorul este mai mic decât numitorul.

$$\frac{a}{b} \text{ subunitară dacă } a < b, \frac{a}{b} < 1$$

Exemplu: $\frac{2}{3}$ este subunitară, deoarece $2 < 3$.

Definiție: O fracție ordinară se numește **echiunitară** dacă numărătorul este egal cu numitorul.

$$\frac{a}{b} \text{ echiunitară dacă } a = b, \frac{a}{b} = 1$$

Exemplu: $\frac{2}{2}$ este echiunitară, deoarece $2 = 2$.

Definiție: O fracție ordinară este **supraunitară** dacă numărătorul este mai mare decât numitorul.

$$\frac{a}{b} \text{ supraunitară dacă } a > b, \frac{a}{b} > 1$$

Exemplu: $\frac{6}{5}$ este supraunitară, deoarece $6 > 5$.

2 SĂ ÎNVĂȚĂM ÎMPREUNĂ

1. Fie fracțiile ordinare: $\frac{2}{7}, \frac{5}{8}, \frac{6}{6}, \frac{8}{3}, \frac{5}{9}, \frac{9}{4}, \frac{9}{9}$. Scrieți fracțiile:

- a) echiunitare; b) supraunitare; c) subunitare.

Soluție: a) $\frac{6}{6}, \frac{9}{9}$; b) $\frac{8}{3}, \frac{9}{4}$; c) $\frac{2}{7}, \frac{5}{8}, \frac{5}{9}$.

2. a) Scrieți fracția echiunitară având numărătorul 11.
b) Scrieți toate fracțiile subunitare având numitorul 5.
c) Scrieți toate fracțiile supraunitare având numărătorul 6.

Soluție: a) $\frac{11}{11}$; b) $\frac{0}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$; c) $\frac{6}{1}, \frac{6}{2}, \frac{6}{3}, \frac{6}{4}, \frac{6}{5}$.

3. a) Aflați numărul natural x , știind că fracția $\frac{13}{2x-1}$ este echiunitară.

b) Aflați numărul natural nenul x , știind că fracția $\frac{13}{2x-1}$ este supraunitară.

c) Aflați numărul natural nenul x , știind că fracția $\frac{13}{2x-1}$ este subunitară.

Soluție: a) $2x - 1 = 13 \Leftrightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7$.

b) $13 > 2x - 1 \Leftrightarrow 2x < 14 \Rightarrow x < 7 \Rightarrow x$ poate fi 1, 2, 3, 4, 5, 6.

c) $13 < 2x - 1 \Leftrightarrow 2x > 14 \Rightarrow x > 7 \Rightarrow x$ poate fi 8, 9, 10, ...

4. a) Scrieți toate fracțiile supraunitare de forma $\frac{\overline{2x}}{x^2}$.

b) Scrieți toate fracțiile subunitare având numărătorul cuprins între 6 și 10 și numitorul cuprins între 4 și 12.

c) Scrieți toate fracțiile echiunitare de forma $\frac{\overline{ab}}{a^2}$.

Soluție: a) $\overline{2x} > x^2 \Rightarrow$ fracție supraunitară $\frac{21}{12}$.

b) Frații subunitare: $\frac{7}{8}, \frac{7}{9}, \frac{7}{10}, \frac{7}{11}, \frac{8}{9}, \frac{8}{10}, \frac{8}{11}, \frac{9}{10}, \frac{9}{11}$.

c) $\overline{ab} = a^2 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow$ fracțiile echiunitare $\frac{\overline{a2}}{a^2}$ sunt $\frac{12}{12}, \frac{22}{22}, \frac{32}{32}, \frac{42}{42}, \frac{52}{52}, \frac{62}{62}$,

$\frac{72}{72}, \frac{82}{82}, \frac{92}{92}$.

3 CUM APLICĂ CE AM ÎNVĂȚAT

Standard minimal

1. Fie fracțiile: $\frac{2}{10}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{3x}{2x}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{11}{3}$, $\frac{1x}{2x}$. Identificați fracțiile:
- a) subunitare; b) supraunitare; c) echiunitare.
2. a) Scrieți fracțiile supraunitare cu numărătorul 7.
b) Scrieți fracțiile subunitare cu numitorul 7.
c) Scrieți fracțiile echiunitare cu numărătorul cuprins între 2 și 5 și numitorul cuprins între 2 și 7.
d) Scrieți toate fracțiile supraunitare având numărătorul cifră pară, iar numitorul cifră impară.
3. a) Scrieți toate fracțiile $\frac{a}{b}$ subunitare cu $a \mid 6$ și $b \mid 4$.
b) Scrieți toate fracțiile subunitare de forma $\frac{5x}{xy}$ cu $\overline{xy} : 10$.
c) Scrieți toate fracțiile supraunitare de forma $\frac{3x}{x2}$ cu $\overline{3x} : 3$.
d) Scrieți toate fracțiile echiunitare de forma $\frac{ab}{ba}$.
4. a) Aflați numărul natural x , știind că fracția $\frac{12}{x}$ este subunitară.
b) Aflați numărul natural x , știind că fracția $\frac{20}{x+2}$ este supraunitară.
c) Aflați numărul natural x , știind că fracția $\frac{2x-26}{14}$ este echiunitară.
d) Aflați numărul natural x , știind că fracția $\frac{3x+1}{22}$ este subunitară.
5. Scrieți sub formă de fracție ordinară:
- a) o șesime; b) două cincimi; c) trei zecimi;
d) trei sferturi; e) o treime; f) o doime.

Standard consolidare

6. Demonstrați că fracția $\frac{\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} + \overline{ba} + \overline{cb} + \overline{ac}}{22 \cdot (a + b + c)}$ este echiunitară.
7. Fie fracțiile $\frac{\overline{ab}}{\overline{cd}}$, unde \overline{ab} este pătrat perfect, iar \overline{cd} este multiplu de 30.
- Scrieți toate fracțiile subunitare.
 - Scrieți toate fracțiile supraunitare.
 - Există fracții echiunitare? Justificați răspunsul.
8. Fie fracțiile $\frac{\overline{ab}}{\overline{c1}}$, unde $\overline{ab} : 10$ și $\overline{c1}$ este prim.
- Scrieți toate fracțiile subunitare.
 - Scrieți toate fracțiile supraunitare.
 - Există fracții echiunitare? Justificați răspunsul.
9. Fie fracțiile $\frac{\overline{5x}}{\overline{y4}}$, cu $\overline{5x} : 2$ și $\overline{y4} : 3$.
- Scrieți toate fracțiile supraunitare.
 - Scrieți toate fracțiile subunitare.
 - Există fracții echiunitare? Justificați răspunsul.
10. Demonstrați că dacă fracția $\frac{a}{b}$ este supraunitară, atunci fracția $\frac{2 \cdot \overline{ab} + 3 \cdot \overline{ba}}{5 \cdot \overline{aa}}$ este subunitară.
11. Fie fracțiile $\frac{\overline{x3}}{\overline{3y}}$, unde $\overline{x3}$ este număr compus, iar $\overline{3y} : 9$.
- Scrieți toate fracțiile supraunitare.
 - Scrieți toate fracțiile subunitare.
 - Există fracții echiunitare? Justificați răspunsul.
12. Fie fracțiile $\frac{\overline{ab}}{\overline{cd}}$, cu $\overline{ab} : 10$, $\overline{ab} : 3$ și $\overline{cd} | 40$.
- Scrieți toate fracțiile subunitare.
 - Scrieți toate fracțiile supraunitare.

13. Fie fracțiile $\frac{\overline{abc}}{\overline{def}}$, unde \overline{abc} este cub perfect, $\overline{def} : 9$ și $\overline{def} : 10$. Scrieți toate fracțiile supraunitare.

Excelență (aprofundare)

14. Aflați toate perechile de numere prime (x, y) pentru care fracția $\frac{2024}{x^2 + 7y^2}$ este echiunitară.

15. Demonstrați că fracția $\frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2024}}{2^{201} \cdot 4^{462} \cdot 8^{300} - 2}$ este supraunitară.

16. Aflați numerele naturale x și y pentru care fracția $\frac{2026}{x^3 + y^2}$ este echiunitară.

17. Demonstrați că fracția $\frac{1 + 3 + 5 + \dots + 2025}{2 + 4 + 6 + \dots + 2026}$ este subunitară.

18. Aflați câte fracții supraunitare de forma $\frac{2026}{x^2 + x}$ există, unde x este un număr natural nenul.

19. Aflați câte fracții subunitare de forma $\frac{x^2 - x}{2026}$ există, unde x este un număr natural nenul.

20. Aflați numărul natural x , știind că fracția $\frac{2026}{x^3 + (x + 44)^2}$ este echiunitară.

Lecția 2. Frații echivalente

1 CE TREBUIE SĂ REȚIN

Definiție: Două fracții ordinare sunt **echivalente** dacă sunt egale.

Formule:

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ dacă $ad = bc$;
- $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ dacă $ad \neq bc$;
- dacă $\frac{a}{b} = \frac{a}{c}$ și $a \neq 0 \Rightarrow b = c$;
- dacă $\frac{a}{b} = \frac{c}{b} \Rightarrow a = c$.

Exemple:

- Frațiile $\frac{1}{2}$ și $\frac{2}{4}$ sunt echivalente, deoarece $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, $1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$, $4 = 4$;
- Frațiile $\frac{1}{4}$ și $\frac{2}{3}$ nu sunt echivalente, deoarece $\frac{1}{4} \neq \frac{2}{3}$, $1 \cdot 3 \neq 2 \cdot 4$, $3 \neq 8$.

2 SĂ ÎNVĂȚĂM ÎMPREUNĂ

1. Demonstrați că fracțiile sunt echivalente:

- a) $\frac{1}{5}$ și $\frac{5}{25}$; b) $\frac{3}{2}$ și $\frac{30}{20}$; c) $\frac{5}{4}$ și $\frac{10}{8}$.

Soluție: a) $\frac{1}{5} = \frac{5}{25}$, deoarece $1 \cdot 25 = 5 \cdot 5$, $25 = 25$.

b) $\frac{3}{2} = \frac{30}{20}$, deoarece $3 \cdot 20 = 2 \cdot 30$, $60 = 60$.

c) $\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$, deoarece $5 \cdot 8 = 10 \cdot 4$, $40 = 40$.

2. Demonstrați că fracțiile nu sunt echivalente:

- a) $\frac{3}{2}$ și $\frac{1}{4}$; b) $\frac{7}{5}$ și $\frac{1}{2}$; c) $\frac{\overline{3x}}{5}$ și $\frac{\overline{2y}}{7}$.

Soluție: a) $\frac{3}{2} \neq \frac{1}{4}$, deoarece $3 \cdot 4 \neq 2 \cdot 1$, $12 \neq 2$.

b) $\frac{7}{5} \neq \frac{1}{2}$, deoarece $7 \cdot 2 \neq 1 \cdot 5$, $14 \neq 5$.

c) $\frac{\overline{3x}}{5} \neq \frac{\overline{2y}}{7}$, deoarece $7 > 5$, $\overline{3x} > \overline{2y} \Rightarrow 7 \cdot \overline{3x} > 5 \cdot \overline{2y} \Rightarrow 7 \cdot \overline{3x} \neq 5 \cdot \overline{2y}$.

3. Aflați numărul natural x , pentru care fracțiile sunt echivalente:

a) $\frac{1}{x+3}$ și $\frac{1}{8}$;

b) $\frac{1}{2x-3}$ și $\frac{1}{5}$;

c) $\frac{x}{8}$ și $\frac{8}{x}$;

d) $\frac{16}{2^x}$ și $\frac{1}{64}$.

Soluție: a) $\frac{1}{x+3} = \frac{1}{8} \Rightarrow x+3 = 8 \Rightarrow x = 5$.

b) $\frac{1}{2x-3} = \frac{1}{5} \Rightarrow 2x-3 = 5, 2x = 8, x = 4$.

c) $\frac{x}{8} = \frac{8}{x} \Rightarrow x^2 = 8^2 \Rightarrow x = 8$.

d) $\frac{16}{2^x} = \frac{1}{64} \Rightarrow 2^x = 2^6 + 2^4 \Rightarrow 2^x = 2^{10} \Rightarrow x = 10$.

3 CUM APLIC CE AM ÎNVĂȚAT

Standard minimal

1. Demonstrați că fracțiile sunt echivalente:

a) $\frac{2}{9}$ și $\frac{6}{27}$;

b) $\frac{3}{7}$ și $\frac{15}{35}$;

c) $\frac{8}{3}$ și $\frac{24}{9}$;

d) $\frac{3}{11}$ și $\frac{9}{33}$.

2. Demonstrați că fracțiile nu sunt echivalente:

a) $\frac{1}{10}$ și $\frac{1}{11}$;

b) $\frac{2}{13}$ și $\frac{2}{7}$;

c) $\frac{7}{10}$ și $\frac{5}{10}$;

d) $\frac{8}{3}$ și $\frac{7}{4}$.

3. Studiați care fracții sunt echivalente și care fracții nu sunt echivalente:

a) $\frac{2}{12}$ și $\frac{1}{6}$;

b) $\frac{36}{72}$ și $\frac{1}{2}$;

c) $\frac{3}{2}$ și $\frac{1}{15}$;

d) $\frac{8x}{2}$ și $\frac{1}{3}$.

4. Aflați numărul x , știind că fracțiile sunt echivalente:

a) $\frac{x}{6} = \frac{5}{3}$;

b) $\frac{6}{x} = \frac{1}{12}$;

c) $\frac{3}{4} = \frac{x}{12}$;

d) $\frac{2}{5} = \frac{12}{x}$;

e) $\frac{x-1}{4} = 2$.

5. Dacă $\frac{24}{a} = \frac{b}{5}$, calculați $9ab + 120$.

Standard consolidare

6. Scrieți patru fracții echivalente cu fracția $\frac{2}{3}$.

7. Aflați numărul natural x pentru care fracțiile sunt echivalente:

a) $\frac{8}{x^2}$ și $\frac{x}{64}$;

b) $\frac{3}{2x-1}$ și $\frac{1}{27}$;

c) $\frac{x-4}{6}$ și 5;

d) $\frac{3x-1}{29}$ și 1;

e) $\frac{3^x}{27}$ și 243;

f) $\frac{8}{2^x}$ și $\frac{1}{1024}$.

8. Aflați numărul natural x , știind că:

a) $\frac{3x-1}{x+1} = 1$;

b) $\frac{5x-2}{2x-3} = \frac{13}{3}$;

c) $\frac{7x-2}{5} = \frac{33}{5}$;

d) $\frac{2x+3}{3x+1} = \frac{13}{16}$.

9. Aflați numărul natural x , știind că:

a) $\frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$;

b) $\frac{5x}{x^5} = \frac{17}{5}$;

c) $\frac{4x}{8x} = \frac{11}{21}$;

d) $\frac{xx}{2x} = \frac{11}{6}$.

10. Aflați numărul natural x , știind că:

a) $\frac{2(x+1)+3}{3} = 3$;

b) $\frac{3(2x-1)+5}{7} = \frac{52}{14}$;

c) $\frac{3}{x+1} = \frac{x+1}{12}$;

d) $\frac{x-5}{5} = \frac{125}{x-5}$.

11. Scrieți patru fracții de forma $\frac{ab}{cd}$ echivalente cu fracția $\frac{1}{4}$.

12. Aflați numărul natural x , știind că $\frac{1}{x^2+4x} = \frac{x^2+4x}{2025}$.

13. Aflați numerele naturale x și y , știind că $\overline{12x} : 5$ și că fracțiile $\frac{\overline{12x}}{5}$ și $\frac{y}{3}$ sunt echivalente.

Excelență (aprofundare)

14. Aflați perechile de numere naturale (a, b) pentru care fracțiile $\frac{a}{2027}$ și $\frac{1}{b+1}$ sunt echivalente.

15. Dacă $n \geq 2$ este număr natural, demonstrați că fracțiile $\frac{1+2+2^2+\dots+2^n}{n}$ și $\frac{1+2+3+\dots+n}{n^2+2n}$ nu pot fi echivalente. (Se poate folosi faptul că $2^n > n$, pentru orice număr natural $n \geq 2$.)

16. Aflați numărul natural x , știind că:

$$\frac{x^2}{2025} = \frac{1}{(x+4)^2}.$$

17. Aflați numărul natural n , știind că:

$$\frac{(n+2)!}{n!} = 72,$$

unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

18. Aflați numărul natural n , știind că:

$$\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{2+4+6+\dots+2n} = \frac{2025}{2026}.$$

19. Dacă a, b, m, n sunt numere naturale nenule, cu $m \neq n$ și $\frac{a+n}{b+n} = \frac{a+m}{b+m}$, demonstrați că $a = b$.

20. Aflați numerele naturale n , știind că $\frac{1+2+3+\dots+n}{1+3+\dots+(2n-1)}$ este subunitară.